

Přednáška č. 12:

Elektrické vedení

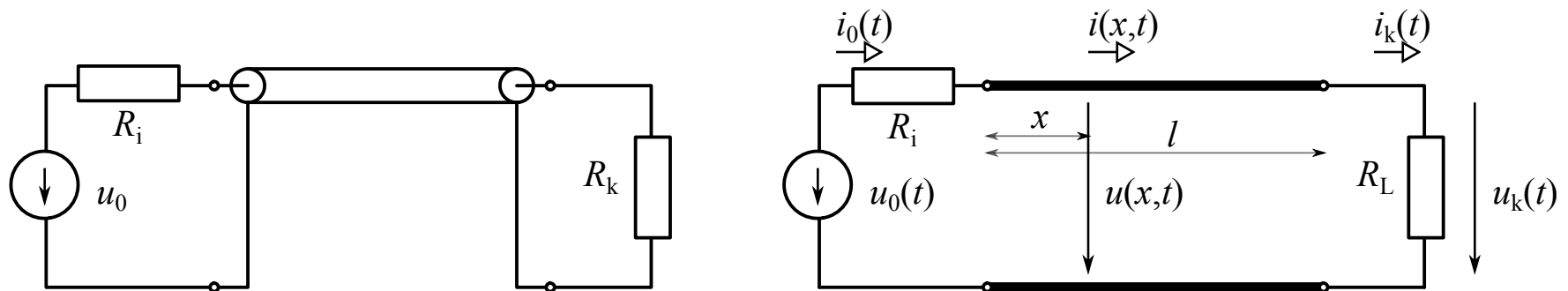
Obsah

	4	Bezeztrátové vedení	7
1 Úvod	2	5 Vedení při harmonickém buzení	10
2 Primární parametry vedení	4	6 Výpočetní příklady	15
3 Rovnice vedení	5	7 Demonstrativní měření	20

1 Úvod

Uvažujme, že mezi zdrojem a zátěží je **vedení**. Kdy je třeba uvažovat jevy na vedení?

- Obecně: když se šíří napětí se *strmými* hranami
- Při harmonickém buzení: když je vedení *dlouhé* (krátké vedení má délku $l < \lambda/4$). Platí $\lambda = v_f/f$, kde v_f [m/s] je fázová rychlost a f [Hz] je frekvence. Ve vakuu, kde $v_f = c$ je pro $f = 50$ Hz $\lambda = 6000$ km, pro $f = 30$ MHz je $\lambda = 10$ m. V kabelovém vedení se snižuje v_f a tím i λ .



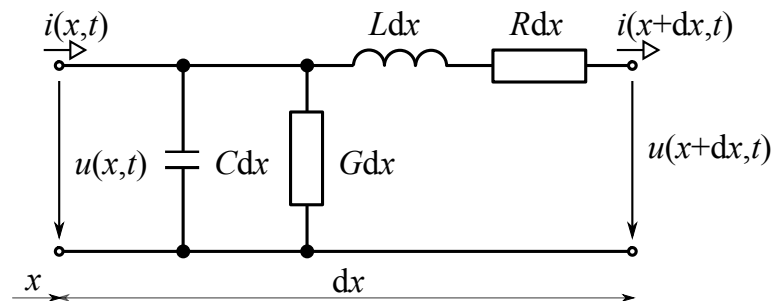
Jak počítat vedení?

- Obvod *se soustředěnými parametry* - konečný počet konečně velkých prvků –
 - Možno počítat elektricky krátké vedení ($l < \lambda/4$, dostatečně málo strmé hrany, aby nenastaly odrazy a rušení)
- Obvod *s rozprostřenými parametry* - nekonečný počet nekonečně malých prvků (dlouhá vedení pro přenos energie/informací)
 - postihuje vlnový charakter probíhajících dějů
 - v případě vedení jsou napětí a proudy funkcemi času a souřadnice x

2 Primární parametry vedení

Primární parametry vedení udávají odpor, indukčnost, svod a kapacitu vedení na jednotku délky. Značí se R , L , G , C , mají však odlišné rozměry:

- R [Ω/m]
- L [H/m]
- C [F/m]
- G [S/m]



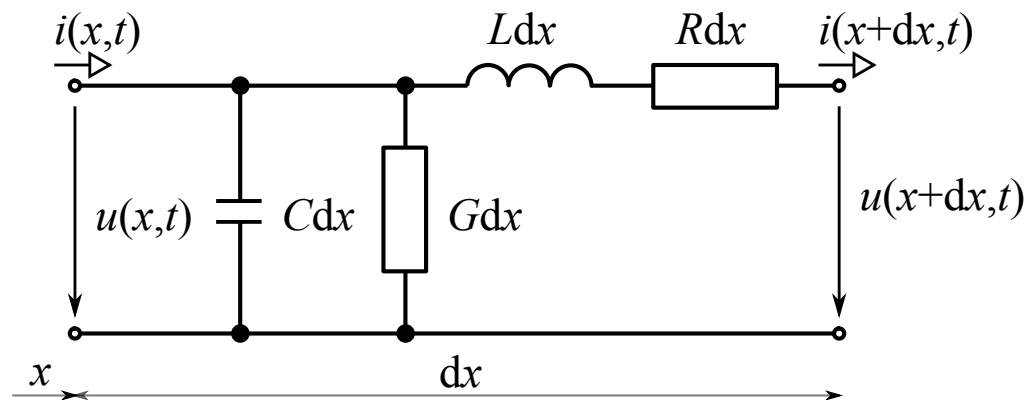
Obrázek: Obvodový model elementárního úseku vedení

3 Rovnice vedení

Aplikací Kirchhoffových zákonů na náhradní obvodový model elementárního úseku vedení dle obr. získáme **základní rovnice vedení**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = R \cdot i + L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (\text{z 2. Kirchhoffova zákona})$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = G \cdot u + C \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{z 1. Kirchhoffova zákona})$$



Ze základních rovnic vedení lze derivací první rovnice podle x a druhé rovnice podle t odvodit **vlnové rovnice vedení**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (LG + RC)L \frac{\partial u}{\partial t} + RG \cdot u \quad (\text{vlnová rovnice pro napětí})$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (LG + RC)L \frac{\partial i}{\partial t} + RG \cdot i \quad (\text{vlnová rovnice pro proud})$$

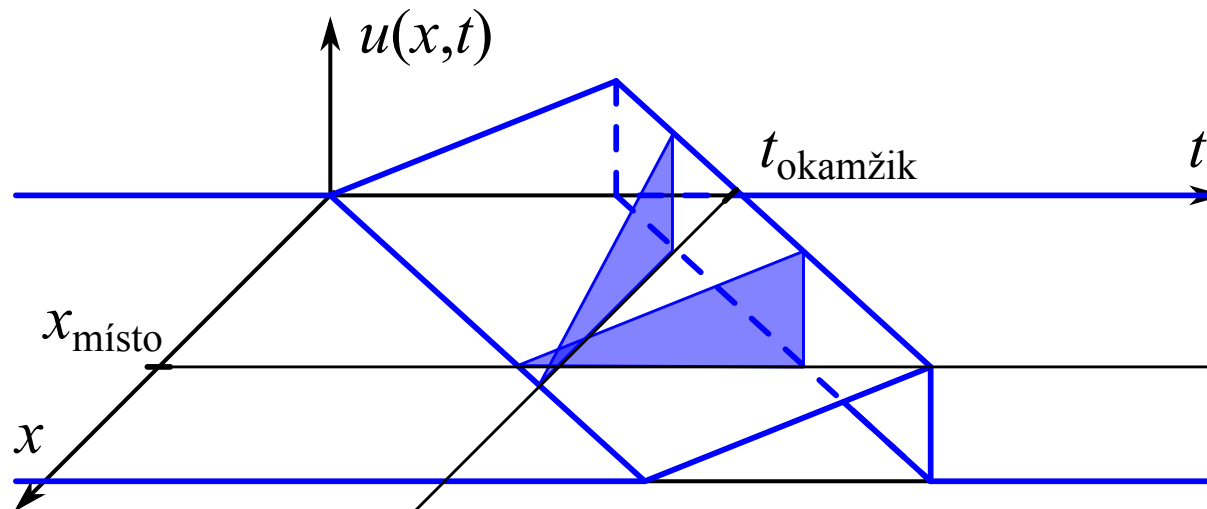
Pro řešení vlnových rovnic musí být dány:

- Počáteční podmínky: napětí a proud na vedení v čase $t = 0$
- Okrajové podmínky: časový průběh napětí a proudu v jednom místě vedení

4 Bezeztrátové vedení

Řešením vlnových rovnic jsou

- pro napětí: součet přímé vlny napětí u_P a zpětné vlny napětí u_Z
- pro proud: součet přímé vlny proudu i_P a zpětné vlny proudu i_Z



Obr.: Šíření přímé trojúhelníkové vlny napětí po nekonečně dlouhém bezeztrátovém vedení

Vlnový (též charakteristický) odpor vedení:

$$R_0 = \frac{u_P}{i_P} = -\frac{u_Z}{i_Z} [\Omega]$$

Pro bezeztrátové vedení je $R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$

Pro zdroj přímé vlny, který je připojen na začátku vedení, se vedení chová jako rezistor o odporu rovném R_0 .

Vlna se šíří po vedení a dokud nedorazí na konec vedení, neodrazí se a nevrátí zpět, zdroj *neví*, co je *za vedením*.

Odrazy vln: Uvažujme rozhraní dvou vedení 1 a 2. Na rozhraní musí platit

$$\frac{u_{P1}}{i_{P1}} = R_{01}, \quad \frac{u_{Z1}}{i_{Z1}} = -R_{01}, \quad \frac{u_{P2}}{i_{P2}} = R_{02}$$

Z rovnic lze odvodit vztahy pro výpočet činitele odrazu vln napětí a proudu:

- **Činitel odrazu** pro vlnu napětí resp. proudu

$$\rho_u = \frac{u_{Z1}}{u_{P1}} = \frac{R_{02} - R_{01}}{R_{01} + R_{02}}, \quad \rho_i = \frac{i_{Z1}}{i_{P1}} = \frac{R_{01} - R_{02}}{R_{01} + R_{02}}$$

- Zavádí se společný činitel odrazu $\rho = \rho_u = -\rho_i$ [–]

Co se děje na konci vedení?

- *vedení naprázdno*: $R_{02} = \infty \Omega$, takže $\rho = \rho_u = 1$ a $\rho_i = -1$... nulový proud
- *vedení nakrátko*: $R_{02} = 0 \Omega$, takže $\rho = \rho_u = -1$ a $\rho_i = 1$... nulové napětí
- *vedení přizpůsobené*: $R_{02} = R_{01}$, takže $\rho = \rho_u = \rho_i = 0$... nedochází k odrazům

5 Vedení při harmonickém buzení

- Základní rovnice pro H.U.S. pomocí fázorů

$$\frac{d\hat{U}}{dx} = (R + j\omega L)\hat{I}, \quad \frac{d\hat{I}}{dx} = (G + j\omega C)\hat{U}$$

- Vlnové rovnice pro H.U.S. pomocí fázorů

$$\frac{d^2\hat{U}}{dx^2} = \hat{Z}_l\hat{Y}_q\hat{U} = \gamma^2\hat{U}, \quad \frac{d^2\hat{I}}{dx^2} = \hat{Z}_l\hat{Y}_q\hat{I} = \gamma^2\hat{I}, \text{ kde}$$

– $\hat{Z}_l = (R + j\omega L)$ [Ω/m] je podélná impedance vedení

– $\hat{Y}_q = (G + j\omega C)$ [S/m] je příčná admitance vedení

– $\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \sqrt{\hat{Z}_l\hat{Y}_q} = \alpha + j\beta$ [m^{-1}] je **činitel šíření**

* $\alpha = \text{Re}\{\gamma\}$ [m^{-1}] je **měrný útlum** - pokles amplitudy na 1 metru vedení

* $\beta = \text{Im}\{\gamma\}$ [m^{-1}] je **měrný posun** - změna fáze na 1 metru vedení

Sekundární parametry vedení

- Po vedení se šíří fázory přímé vlny napětí a proudu \hat{U}_P a \hat{I}_P a také fázory zpětné vlny napětí a proudu \hat{U}_Z a \hat{I}_Z . Platí:

$$\frac{\hat{U}_P}{\hat{I}_P} = \hat{Z}_0, \quad \frac{\hat{U}_Z}{\hat{I}_Z} = -\hat{Z}_0, \quad \hat{Z}_0 = \sqrt{\frac{\hat{Z}_l}{\hat{Y}_q}} = \sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}}, \text{ kde}$$

– $\hat{Z}_0 = Z_0 e^{j\varphi_{Z_0}}$ [Ω] je **vlnová impedance** vedení

- Činitel šíření a vlnová impedance jsou tzv. *sekundární parametry vedení*

Vlnová délka: harmonickou vlnu lze charakterizovat pomocí *vlnové délky* λ [m] - nejkratší vzdálenosti dvou míst se stejnou fází. Perioda funkce sinus je 2π , takže platí:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \implies \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

Fázová rychlost: místo s určitou fází postupuje po vedení tzv. *fázovou rychlostí* v_f [m/s], pro níž platí:

$$v_f = \lambda f = \lambda \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{\beta}$$

- pozn.: pro bezeztrátové vedení je $v_f = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
 - pro vzduch je $LC = \mu_0\epsilon_0$, takže $v_f = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, fázová rychlost je rovna rychlosti světla.
 - pro prostředí (např. kabelové vedení) o parametrech ϵ_0 a μ_0 je $LC = \mu_0\mu_r\epsilon_0\epsilon_r$, takže $v_f = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu_r\epsilon_0\epsilon_r}} < c$.
 -

Další vztahy pro harmonicky buzené vedení:

- Přímý výpočet α a β

$$\alpha^2 = \frac{1}{2} \left[(RG - \omega^2 LC) + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} \right]$$

$$\beta^2 = \frac{1}{2} \left[-(RG - \omega^2 LC) + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} \right]$$

- Sekundární parametry vedení lze snadno měřit, primární parametry vedení lze měřit obtížně, ale lze je ze sekundárních parametrů dopočítat.

$$R = \operatorname{Re}\{\gamma \hat{Z}_0\}, \quad L = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im}\{\gamma \hat{Z}_0\}, \quad C = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im}\left\{\frac{\gamma}{\hat{Z}_0}\right\}, \quad G = \operatorname{Re}\left\{\frac{\gamma}{\hat{Z}_0}\right\}$$

Odrazy vln při harmonickém buzení

Pro činitel odrazu platí pomocí vlnových impedancí platí obdobné vztahy jako pro činitel odrazu pomocí vlnových odporů na bezeztrátovém vedení.

$$\hat{\rho}_u = \frac{\hat{U}_{Z1}}{\hat{U}_{P1}} = \frac{\hat{Z}_{02} - \hat{Z}_{01}}{\hat{Z}_{01} + \hat{Z}_{02}}, \quad \hat{\rho}_i = \frac{\hat{I}_{Z1}}{\hat{I}_{P1}} = \frac{\hat{Z}_{01} - \hat{Z}_{02}}{\hat{Z}_{01} + \hat{Z}_{02}}$$

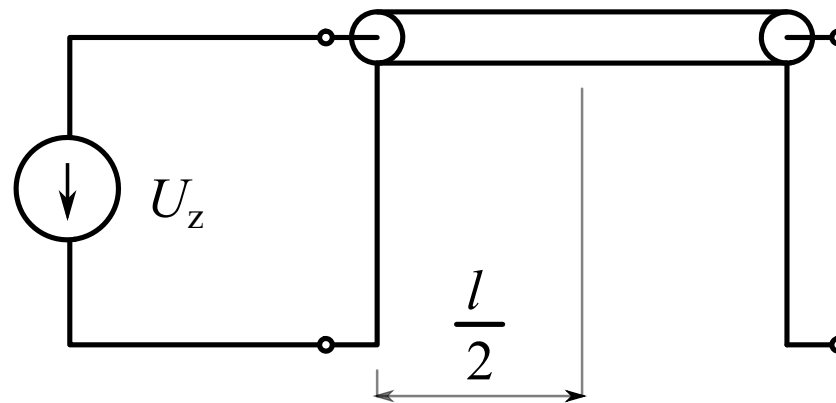
Zavádí se společný činitel odrazu $\hat{\rho} = \hat{\rho}_u = -\hat{\rho}_i$ [-]

6 Výpočetní příklady

Příklad 12_1: Uvažujte vedení naprázdno s ideálním zdrojem napětí podle obrázku 3.

Určete průběh napětí v polovině délky vedení po připojení zdroje, tj.

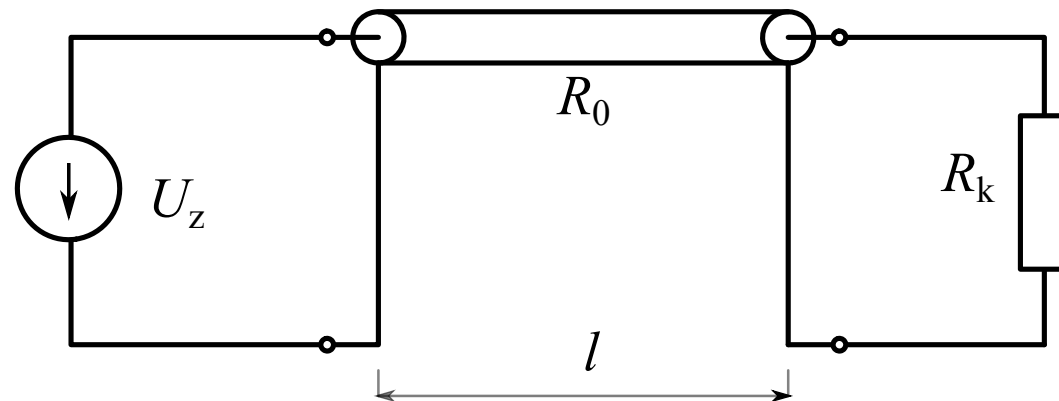
$$u\left(\frac{l}{2}, t\right) = ?$$



Obrázek 3: Zadané vedení.

Příklad 12_2: Bezeztrátové vedení o vlnovém odporu $R_0 = 50 \text{ } [\Omega]$ je napájeno z ideálního (tj. $R_z = 0 \text{ } [\Omega]$) zdroje napětí $U_z = 50 \text{ V}$ a je zakončeno rezistorem $R_k = 150 \text{ } [\Omega]$. Určete:

- časový průběh napětí a proudu ve vzdálenosti $\frac{l}{2}$ a l pro první čtyři přeběhy vln po připojení zdroje,
- hodnoty napětí a proudu po ustálení.

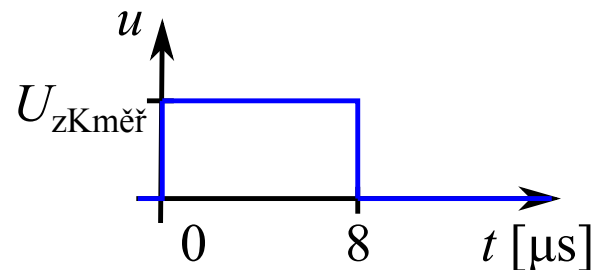


Obrázek 4: Zadaný obvod.

Příklad 12_3: Popište děj na rozhraní venkovního vedení o vlnovém odporu $R_{0V} = 500 \Omega$ s kabelovým vedením o vlnovém odporu $R_{0K} = 50 \Omega$, pokud se ze strany venkovního vedení šíří rázová obdélníková vlna napětí a proudu o velikosti U resp. I .

Příklad 12_4: Mějme bezeztrátový koaxiální kabel o izolaci $\epsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$. Na začátek kabelu připojíme zdroj o napětí naprázdno $U_z = 200$ V o vnitřním odporu $R_z = 38.5$ Ω . Na začátku vedení je změřeno napětí podle obrázku 5. Určete:

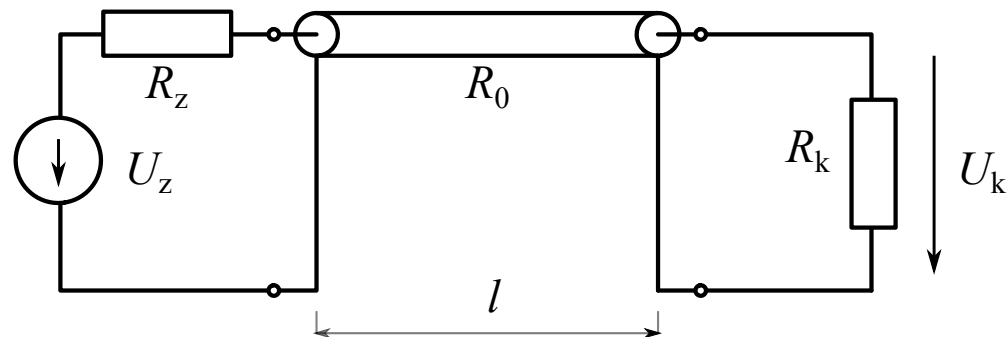
- velikost vlnového (charakteristického) odporu R_0 ,
- velikost $U_{zKměř}$ (změřené napětí na začátku kabelu),
- délku kabelu a
- časové průběhy proudů $i_z(t)$ a $i_k(t)$ na začátku resp. na konci vedení.



Obrázek 5: Změřený průběh napětí na začátku vedení

Příklad 12_5: K homogennímu bezeztrátovému vedení s vlnovým odporem $R_0 = 75 \Omega$ je připojen přizpůsobený zdroj napětí (tj. $R_z = R_0 = 75 \Omega$). Na konec vedení je připojen rezistor $R_k = 25 \Omega$, na rezistoru je naměřeno konstantní napětí $U_k = 10 \text{ V}$. Určete:

- velikost přímé a zpětné vlny napětí U_P a U_Z ,
- velikost přímé a zpětné vlny proudu I_P a I_Z .



Obrázek 6: Zadaný obvod.

7 Demonstrativní měření

Měříme průběh napětí na začátku a na konci koaxiálního kabelu.

Zadáno: výrobce udává relativní permitivitu kabelu $\epsilon_r = 2.59$ a vlnovou (charakteristickou) impedanci vedení $Z_0 = 50 \Omega$.

Úkoly:

- a) Spočítejte rychlost šíření vln v koaxiálním kabelu.
- b) Změřte parametry použitých součástek pro zakončení vedení.
- c) Na funkčním (signálovém) generátoru vygenerujte obdélníkový průběh napětí o frekvenci $f = 250 \text{ kHz}$ a o amplitudě 3 V (dolní úroveň 0 V , horní úroveň 3 V).
- d) Na začátek kabelu připojte osciloskop

Pro všechny níže uvedené konfigurace vedení objasněte průběhy napětí sledované na začátku kabelu.

Ze sledovaného průběhu napětí pro kabelové vedení naprázdno vypočtete délku koaxiálního kabelu.

1. Zapojte vedení naprázdno.
2. Zapojte vedení nakrátko.
3. Na konec vedení zapojte kondenzátor.
4. Na konec vedení zapojte rezistor vyšší hodnoty.
5. Na konec vedení zapojte rezistor nižší hodnoty

Literatura

1. Mikulec M., Havlíček V.,: Základy teorie elektrických obvodů 2, ČVUT, 1998